

**CLUB APOLLO 13, 14. Wettbewerb
Aufgabe 3**

Warum haben Wetterballons eine dehnbare Hülle?

Diese Aufgabe wird vom Institut für Meteorologie und Klimatologie der Leibniz Universität Hannover gestellt.

Weitere Informationen zum Studiengang der Meteorologie findet ihr unter <http://www.muk.uni-hannover.de/>

Ohne die regelmäßige Gewinnung weltweiter meteorologischer Messdaten aus verschiedensten Höhen ist die moderne Wettervorhersage für mehrere Tage im Voraus in der aktuell erreichten Qualität nicht denkbar. Ein wichtiges Instrument sind Wetterballons, die Druck, Temperatur, Feuchte sowie Windgeschwindigkeit und -richtung in Höhen von bis zu 30 km messen. Doch wie konstruiert man einen derartigen Ballon?

Wetterballons sind meistens mit Helium gefüllt und weisen eine sehr empfindliche und extrem dehnbare Hülle auf.



Die Aufgaben

a) Grundlagen: Statik der Atmosphäre (10 Punkte)

Für die Behandlung des Ballonaufstiegs bis in große Höhen ist es notwendig, den vertikalen Aufbau der Atmosphäre zu betrachten. Daher wollen wir uns in diesem Aufgabenteil erst einmal mit dem vertikalen Verlauf der Lufttemperatur, des Luftdrucks sowie der Luftdichte vertraut machen.

1. Zeichnet den mittleren vertikalen Verlauf der Lufttemperatur vom Boden bis zur Stratopause (etwa 50 km Höhe) in ein Diagramm, wobei die y-Achse die Höhe und die x-Achse die Temperatur in Kelvin angebe. Verwendet die Werte, die ihr unter dem Stichwort „US-Standardatmosphäre“ finden könnt. Zwischen den angegebenen Höhen wird der Temperaturverlauf als linear angenommen.
2. Im Folgenden wollen wir ein Vertikalprofil für den Luftdruck und die Luftdichte bestimmen. Bestimmt hierzu zunächst für jeden linearen Abschnitt im Temperaturprofil zwischen dem unteren Höhenniveau z_u und dem oberen Höhenniveau z_o den vertikalen Temperaturgradienten in Kelvin pro 100 Meter, der sich durch folgende Formel berechnet:

$$\gamma = \frac{T_L(z_o) - T_L(z_u)}{z_o - z_u}$$

Dabei bezeichnet $T_L(z)$ die Lufttemperatur in der Höhe z (in Kelvin).

3. Die Vertikalprofile des Luftdrucks $P(z)$ sowie der Luftdichte $\rho(z)$ hängen vom Profil der Temperatur ab. Für einen linearen Verlauf der Temperatur lautet das Profil der Dichte

$$\rho(z) = \rho(z_u) \left(\frac{T_L(z)}{T_L(z_u)} \right)^{\frac{-g}{\gamma R_L} - 1}$$

Dabei ist g die Gravitationsbeschleunigung und

$$T_L(z) = T_L(z_u) + \gamma(z - z_u)$$

Unter Verwendung der idealen Gasgleichung

$$P(z) = \rho(z)R_L T_L(z),$$

wobei R_L die Gaskonstante für (trockene) Luft sei, lässt sich im Weiteren der Druck in jeder Höhe bestimmen. Berechnet mit Hilfe dieser Gleichungen und den in Aufgabenteil 2 ermittelten Temperaturgradienten das Profil des Drucks und der Dichte vom Boden bis zu Stratopause (mit Hilfe einiger Stützpunkte) und stellt diese graphisch dar. Ihr müsst eure Berechnungen am Boden ($z = 0$) beginnen, wobei hier ein Druck von $P(0) = 1.000 \text{ hPa}$ vorausgesetzt sei.

Lösungshinweise:

Wie ihr beim Bearbeiten der Aufgabe sicher feststellen werdet, gibt es einen Höhenbereich (zwischen 11 und 20 km), in dem die Temperatur mit der Höhe konstant verläuft, d.h. der Temperaturgradient ist hier Null. Hierbei gibt es beim Berechnen des Höhenverlaufs der Dichte allerdings ein Problem, da man durch 0 teilen müsste.

Um nun für diesen Höhenabschnitt den Höhenverlauf der Dichte (und auch des Drucks) richtig bestimmen zu können, müsste man eine komplizierte Grenzwertebetrachtung durchführen. Das würde aber für diese Aufgabe zu weit führen. Folgendes Vorgehen liefert ebenfalls ein Ergebnis mit ausreichender Genauigkeit:

Dort, wo eigentlich keine Temperaturänderung vorliegt, könnt ihr einfach von einer sehr kleinen Änderung der Temperatur (0,1 K vom unteren zum oberen Niveau) ausgehen. Damit ergibt sich ein positives, aber sehr kleines γ . Die Werte, die sich dann für die Dichte und den Druck ergeben, weichen nur unwesentlich von der exakten Lösung ab.

b) Ballon mit nicht dehnbarer Hülle (10 Punkte)

Zunächst wollen wir uns einen Ballon mit einer nicht dehnbaren Hülle anschauen.

Angenommen, ein kugelförmiger Ballon mit einer nicht dehnbaren Hülle und einem Durchmesser von 1,50 Meter wird am Boden ($z = 0$) mit Helium befüllt, bis die Hülle gespannt ist bzw. bis der Druck des Heliums im Ballon gerade dem äußeren bodennahen Luftdruck von 1.000 hPa entspricht. Die Temperatur des Heliums beim Befüllen entspricht der Lufttemperatur am Boden, also

$$T_{\text{He}}(0) = T_L(0).$$

Im Folgenden gehen wir in guter Näherung davon aus, dass der Ballon beim Aufstieg keine Wärme mit der Umgebung austauscht.

1. Können sich der Druck, die Temperatur und die Dichte im Ballon beim Aufstieg ändern?
2. Zeichnet die Auftriebskraft in Abhängigkeit von der Höhe in ein Diagramm ein. Bis zu welcher Höhe würde der Ballon aufsteigen, wenn das Gewicht der Ballonhülle samt Anhang (Messinstrumente) $M = 1 \text{ kg}$ beträgt?
3. Gebt eine Gleichung an, mit der man diese Höhe bestimmen kann. **Hinweis:** Die graphische Lösung aus Punkt 2 sollte mit der rechnerischen Lösung übereinstimmen.

c) Ballon mit dehnbarer Hülle (10 Punkte)

Nun betrachten wir einen Ballon mit einer dehnbaren Hülle, der so mit Helium befüllt ist, dass der Ballon vor dem Start (am Boden) den gleichen Durchmesser wie in b) (also 1,50 m) sowie die gleiche Temperatur und das gleiche Gewicht samt Anhang aufweist.

1. Wir setzen voraus, dass die Spannung der Hülle vernachlässigbar ist. Wie groß müsste der Druck des Heliums im Ballon im Verhältnis zum Umgebungsdruck der Atmosphäre in jeder Höhe sein?
2. Damit wir die maximale Aufstiegshöhe bestimmen können, sind folgende Sachverhalte in

Betracht zu ziehen: Wenn der Ballon aufsteigt, dehnt er sich aufgrund der Abnahme des Umgebungsdrucks aus. Unter der Annahme, dass mit der Umgebung keine Wärme bzw. Masse ausgetauscht wird, kann man in der Thermodynamik zeigen, dass in einem idealen Gas bei Abnahme des Druckes sowohl die Temperatur sinkt als auch die Dichte abnimmt. Diese so genannten Adiabatengleichungen führen zusammen mit den Druckverhältnissen in der Atmosphäre zu der Erkenntnis, dass eine aufsteigende Masse Gas bei freier Expansion und ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung sich näherungsweise um den Betrag g/c_p pro Höheneinheit abkühlt, wobei c_p die isobare Wärmekapazität des Gases bezeichne. Im Falle von Helium ergibt sich also

$$T_{He}(z) \approx T_{He}(0) - z \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{5240 \text{ J/(kg K)}}$$

Zeichnet die Auftriebskraft wie in b) in ein entsprechendes Diagramm und bestimmt graphisch die maximale Aufstiegshöhe.

3. Löst das Problem zusätzlich rechnerisch mit Hilfe einer Bestimmungsgleichung für die maximale Aufstiegshöhe.
4. Welchen Durchmesser d hätte der Ballon auf dieser maximalen Höhe?
5. Könnt ihr nun die Frage beantworten, warum ein Wetterballon eine dehnbare Hülle aufweist?

Lösungshinweise:

Wenn ihr zunächst das Kräftegleichgewicht mit Hilfe der Dichteunterschiede zwischen Luft und Helium formuliert, benötigt ihr im Weiteren die ideale Gasgleichung sowohl für Luft als auch für Helium.

Außerdem muss die Änderung der Temperatur mit der Höhe sowohl des Heliums als auch der Luft mit in Betracht gezogen werden. Auf diese Weise kommt die Höhe z bzw. die Höhendifferenz

$$\Delta z = z - z_u$$

mit ins Spiel, nach welcher die Gleichung im rechnerischen Teil der Aufgabe aufgelöst werden muss.

Daraufhin müsst ihr abschnittsweise vom Boden aus vorgehen und prüfen, ob die einzelnen Abschnitte, in denen die Temperatur linear verläuft, durchstoßen werden, d.h. es ist jeweils zu prüfen, ob

$$\Delta z > z_o - z_u$$

gilt. Des Weiteren kann es vorkommen, dass sich in einzelnen Abschnitten eine Lösung mit negativem Gradienten ergibt. Dies passiert immer dann, wenn die theoretische Lösung für die maximale Aufstiegshöhe für den betrachteten Temperaturgradienten in einer Höhe liegen würde, in welcher die absolute Lufttemperatur negativ wäre, was physikalisch nicht möglich ist. Ihr müsst diese Lösung ebenfalls als ein Durchstoßen der betrachteten Schicht interpretieren.

Weiterhin ist nicht ausgeschlossen, dass der Ballon (sofern er nicht vorher platzen würde) höher aufsteigt, als der betrachtete Höhenbereich von etwa 50 km. Sollte dies in euren Berechnungen der Fall sein, könnt ihr natürlich nicht den Durchmesser für die maximale Aufstiegshöhe angeben. Gebt in diesem Fall einfach den Durchmesser in etwa 50 km Höhe an.

Viel Erfolg bei der dritten Aufgabe!

Verwendet folgende Variablen:

Variable	Bedeutung	höhenabhängig?
m	Masse des Heliums im Ballon	nein
$M = 1 \text{ kg}$	Masse der Ballonhülle samt Anhang	nein
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	Gravitationsbeschleunigung	nein (näherungsweise, da Betrachtungen astronomisch gesehen nahe der Erde)
T_L	Temperatur der Luft	ja
T_{He}	Temperatur des Heliums im Ballon	In b) : ? In c): ja
γ	Vertikaler Temperaturgradient	ja (intervallweise konstant)
ρ_L	Dichte der Luft	ja
ρ_{He}	Dichte des Heliums im Ballon	?
V	Volumen des Ballons	In b): nein In c): ja
d	Durchmesser des Ballons	In b): nein In c): ja
$R_L = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	Gaskonstante trockener Luft	nein
$R_{He} = 2078 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	Gaskonstante für Helium	nein
P	Luftdruck	ja
z	Höhe	--
z_u, z_o	Unteres bzw. oberes Höhenniveau eines linearen Temperaturabschnittes	--

Allgemeine Hinweise

Einsendeschluss: Sonntag, 11. Januar 2015, 19:59 Uhr.

Gebt eure Lösungen über das Portal von uniKIK ab: <http://www.unikik-portal.de/portal>

Zulässige Dateiformate sind: PDF für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern), sowie unter Windows gängige Videoformate, die sich ohne Installation von zusätzlicher Software abspielen lassen, z. B. mp4, sowie STL-Daten. Sollten Schwierigkeiten mit der Ausgabe der STL-Daten auftreten, so bitten wir um eine kurze Rückmeldung, um ein anderes Datenformat abzusprechen.

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (Die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure angehängten Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Dateien! Um sicher zu gehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei und für die Korrektoren/-innen zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch mal von eurem Account runterladen und öffnen. Dateien, die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Ihr könnt und solltet eure Lösung auch dann abgeben, wenn ihr nicht alle Fragen beantworten konntet, insbesondere wenn ihr die letzte Teilaufgabe (die Profi-Aufgabe) nicht gelöst habt! Vielleicht gelingt euch das ja bei der kommenden Aufgabe.

Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter: <http://www.unikik.de/apollo13>
Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.