B!G B4NG Challenge, 22. Wettbewerb

Aufgabe 2: Matrizen

7. November 2022

Quelle: https://bit.ly/3FGzTtu

Diese Aufgabe kommt aus dem Bereich der Mathematik. Weitere Informationen zum Studiengang Mathematik findet ihr unter `https://www.maphy.uni-hannover.de/de/studium/im-studium/mathematik`.

Jenny möchte ein Start-up-Unternehmen gründen, um die Versorgung von Elektronikherstellern mit den benötigten Bauteilen zu verbessern und so eine kostengünstigere Alternative anzubieten. Sie hat jedoch kaum eine Ahnung von dem Planungsprozess. Dafür arbeitet sie mit Alex, einer befreundeten Mathematikerin, zusammen, die ihr die benötigten Produktionsmaterialien und Verkaufsdiagramme anhand von Matrizen erklärt.
Da Jenny allerdings noch nicht mit Matrizen gearbeitet hat, beschäftigt sie sich zunächst damit, was überhaupt eine Matrix ist und wie man mit ihr umgeht.

1 Was ist eine Matrix?

Der Begriff Matrix ist euch vielleicht schon einmal in einem alten Sci-Fi-Film aus den 1990er Jahren begegnet, bezeichnet allerdings ebenfalls ein zentrales Hilfsmittel der linearen Algebra u. a. zum Lösen von linearen Gleichungssystemen. In der Mathematik schreiben wir die Matrix als Zahlenfeld mit einer beliebigen, aber endlichen Zeilen- und Spaltenanzahl und kennzeichnen diese typischerweise mit einem Großbuchstaben. Im

Folgenden sind zwei Beispielmatrizen notiert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die Einträge dieser Matrizen bezeichnen wir als Komponenten und die Zeilen- und Spaltenanzahl einer solchen Matrix bezeichnen wir als Dimension. Die Matrix A aus dem Beispiel hat 3 Zeilen und 3 Spalten, daher handelt es sich bei ihr um eine 3×3-Matrix („Drei-Kreuz-Drei-Matrix“). Mathematisch schreibt man auch: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Die Matrix B hingegen hat auch 3 Zeilen, aber nur 2 Spalten, daher gilt hier: $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Das $\mathbb{R}$ drückt hier nur aus, dass in den Komponenten alle möglichen reellen Zahlen stehen können. Über die Dimension können wir ebenfalls sofort die Anzahl an Komponenten bestimmen. Nehmen wir uns den allgemeinen Fall einer Matrix C, für die gilt $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, so wissen wir nun, dass diese Matrix n Zeilen und m Spalten hat. Manchmal schreibt man auch kurz $C^{n\times m}$. Es müssen also insgesamt $n \cdot m$ Komponenten in diesem Zahlenfeld vorkommen. Damit wir die Komponenten ebenfalls in dem allgemeinen Fall unterscheiden können, weisen wir jeder Komponente zwei Indizes entsprechend ihrer Position im Zahlenfeld zu:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}^{n\times m}. \tag{2}$$

Der erste Index kennzeichnet dabei die Zeile und der zweite Index die Spalte. Benötige ich also aus dem Beispiel (1) die Komponente a_{23} der Matrix A, so kann ich sofort ablesen: $a_{23} = 5$.
Matrizen können ebenfalls in speziellen Fällen als sogenannte Vektoren aufgefasst werden. Diese Vektoren werden oft durch einen Pfeil über einem Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Besitzt eine Matrix nur eine Spalte, aber endlich viele Zeilen, so bezeichnen wir dieses Objekt als Spaltenvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ebenso bezeichnen wir eine Matrix mit nur einer Zeile, aber endlich vielen Spalten als Zeilenvektor $\vec{x} = (x_1, ..., x_m)$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Wie man sieht, reicht in dem Fall eines Vektors ebenfalls ein Index bei der Dimensionskennzeichnung, da die andere Dimension natürlich mit 1 bekannt ist.

Für Matrizen gelten nun besondere Rechenregeln, die wir im Folgenden kennenlernen werden.

2 Rechnen mit Matrizen (13+1 Punkte)

2.1 Matrixaddition

Zwei oder mehr Matrizen lassen sich addieren und subtrahieren, wenn die Matrizen die gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten haben. Ist dies der Fall, so werden die Matrizen komponentenweise addiert bzw. subtrahiert.

2.1.1 Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 7 \\ 13 & 2 & 4 \end{pmatrix} + A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 12 & 9 & 6 \\ 13 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 2 \\ 3 & -0,2 \\ 4 & 3,1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 1 & 2,5 \\ 4,3 & -1 \\ 3,5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + C + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Findet die passenden Komponenten und Dimensionen für die Matrizen A, B und C, welche diese Gleichungen lösen.

2.2 Matrixmultiplikation

Neben der Addition und Subtraktion gibt es noch die Matrixmultiplikation. Multiplizieren wir zwei Matrizen A und B, so erhalten wir eine neue Matrix C entsprechend der folgenden Beispielgleichung:

$$\begin{matrix} A^{2\times 2} & \cdot & B^{2\times 2} & = & C^{2\times 2} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Wie bestimmt man nun die Einträge von C? Betrachten wir nur die erste Zeile der Matrix A, so haben wir $(a_{11} \quad a_{12})$. Das heißt, wir haben nur eine Zeile, aber 2 Spalten. Dies haben wir zuvor als Zeilenvektor kennengelernt. Machen wir nun das Gleiche, allerdings mit der ersten Spalte der Matrix B, so erhalten wir einen Spaltenvektor mit den Komponenten $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$. Wir multiplizieren nun diese beiden Vektoren, indem wir die ersten Komponenten multiplizieren, also $a_{11} \cdot b_{11}$, dann die zweiten Komponenten multiplizieren, also $a_{12} \cdot b_{21}$, und dann diese beiden Ergebnisse addieren. Insgesamt also $a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$. Dies ist unsere neuer Eintrag c_{11}. (Für diejenigen, die die Vektorrechnung schon kennen: Das ist das Skalarprodukt.)
Klingt kompliziert; schauen wir uns daher ein Beispiel an:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Dies können wir auch noch für die übrigen drei Komponenten der Lösungsmatrix C machen und erhalten unser Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Allgemein rechnen wir also immer die n-te Zeile auf die m-te Spalte und das Ergebnis ist dann unsere Komponente c_{nm}. Aus dieser Rechenoperation folgt jedoch, dass die Matrix A immer genauso viele Spalten haben muss wie die Matrix B an Zeilen hat. Ansonsten ist eine Multiplikation **nicht** möglich.

2.3 Aufgabe

Es seien 4 Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.1 Aufgabe: Matrix-Matrix-Multiplikation

Welche Multiplikationen verschiedener Matrizen sind alle möglich? Gebt die jeweiligen Lösungsmatrizen an und markiert ihre Dimension. Ist die Matrizenmultiplikation kommutativ (gilt also $A \cdot B = B \cdot A$)?

2.3.2 Aufgabe: Matrix-Vektor-Multiplikation

Wir fügen jetzt noch die beiden Vektoren $\vec{x}= (2, 3, 1)$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hinzu. Mit welchen Matrizen können wir diese beiden Vektoren von links oder von rechts multiplizieren?

2.3.3 Aufgabe: „neutrale Matrix “

Für die „normale“ Multiplikation von Zahlen wissen wir bereits, dass die 1 ein neutrales Element ist. Das heißt, egal, was ich mit 1 multipliziere, es kommt wieder die gleiche Zahl heraus: $x \cdot 1 = x$, wobei x jede mögliche reelle Zahl ist. Gibt es auch eine „neutrale Matrix“ N, für die bei der Multiplikation mit jeder möglichen Matrix gilt:

$$A^{m \times n} \cdot N^{? \times ?} = A^{m \times n}$$

Falls ja, wie sieht diese aus? Nennt zwei konkrete Beispiele. (Bonus: Wie sieht der allgemeine Fall aus?)

3 Die Produktionsmatrix (7 Punkte)

3.1 Einstufige Prozesse

Jetzt haben wir uns sehr viel mit Matrizen als abstrakten, mathematischen Objekten beschäftigt und haben eine Menge Werkzeuge aufgesammelt, die wir im Folgenden verwenden können.
Wir wollen uns zunächst mit den benötigten Materialien zur Herstellung der Bauteile beschäftigen. Dafür hat die befreundete Mathematikerin Alex eine sogenannte **Produktionsmatrix** aufgestellt:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix sieht nicht anders aus als die Matrizen, die wir bis jetzt betrachtet haben. Sie wird allerdings nun zu einer Produktionsmatrix, sobald wir den Zeilen und den Spalten eine Bedeutung zuordnen. Denn bei einer Produktionsmatrix stehen die Spalten für ein Produkt und die Zeilen für einen Rohstoff, der für die Produktion gebraucht wird:

$$P = \begin{array}{l} \\ \text{Flashzelle} \\ \text{Transistorpaket} \\ \text{Lithiumeinheit} \\ \text{Leiterplatte} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{CPU-Chip} & \text{Speicher} & \text{Akku} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

In der ersten Spalte sehen wir also alle Rohstoffe, die für einen CPU-Chip benötigt werden: 3 Transistorenpakete und 2 Leiterplatten. Für den Speicher benötigen wir 2 Flashzellen, 2 Transistorenpakete und 2 Leiterplatten und für den Akku benötigen wir 2 Lithiumeinheiten und 3 Leiterplatten.

3.1.1 Aufgabe

Wie viel von jedem Rohstoffe benötigt man, um von jedem Produkt zwei Stück herzustellen? Schreibt eure Rechnung als Matrix-Vektor-Multiplikation.

Jetzt ist es aber so, dass der Kunde nicht immer gleich viele CPUs, Speicher und Akkus benötigt, sondern teilweise unterschiedlich große Bestellungen abgibt. Zu diesem Zweck geben wir die Bestellung des Kunden in einem Output-Vektor an. Bestellt er also zum Beispiel 40 CPU-Chips, 30 Speicher und 37 Akkus, so wird dies einfach als ein Spaltenvektor $\vec{out}$ angegeben:

$$\vec{out} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 37 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Für Jenny ist es nun wichtig zu wissen, wie viel sie von dem jeweiligen Rohstoff einkaufen muss, damit sie die gewünschte Bestellung bereitstellen kann. Dank der Matrixschreibweise kann sie nun eine direkte Matrix-Vektor-Multiplikation durchführen, um die benötigten Rohstoffe (Input) zu berechnen:

$$P \cdot \vec{out} = \vec{in} \ .$$

3.1.2 Aufgabe

Berechnet den benötigten Input für die Bestellung aus (3).

3.2 Mehrstufige Prozesse

Nach ein paar Jahren möchte Jenny die Produktion ihres Unternehmens um einen Schritt erweitern und sofort Handys, Laptops und Festplatten produzieren. Dafür erstellt ihre Freundin eine neue Produktionsmatrix:

$$P_2 = \begin{array}{l} \\ \text{CPU-Chip} \\ \text{Speicher} \\ \text{Akku} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Handy} & \text{Laptop} & \text{Festplatte} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Da Jenny die Grundstoffe für dieses Endprodukt allerdings in ihrer eigenen Firma produziert, möchte sie nur wissen, wie viel von den ursprünglichen Rohmaterialien sie braucht, um eine bestimmte Anzahl an Endprodukten für ihre Kunden zu produzieren.

3.2.1 Aufgabe

Welche mathematische Operation muss man mit den beiden Matrizen durchführen, um am Ende eine einzelne Produktionsmatrix für den gesamten Prozess zu erhalten? Wie sieht diese Matrix für dieses konkrete Beispiel aus?

3.2.2 Aufgabe

Wie viele Rohmaterialien braucht Jenny, um eine Bestellung von 5 Handys, 3 Laptops und 7 Festplatten umsetzen zu können?

4 Die Übergangsmatrix (10 Punkte)

Jennys Firma wächst über die Jahre immer mehr und sie gewinnt jährlich neue Kunden hinzu, sodass ihr Marktanteil in jedem Jahr steigt. Sie kann allerdings nicht genau überblicken, von welchem Konkurrenten die Kunden zu ihr überlaufen und wohin manche von ihren Kunden abwandern. Sie wendet sich erneut an Alex und fragt, ob sie ihr ein Diagramm erstellen kann, welches die Übergänge der Kunden von einem Elektronikhersteller zum nächsten darstellt. Sie erhält daraufhin ein Prozessdiagramm.

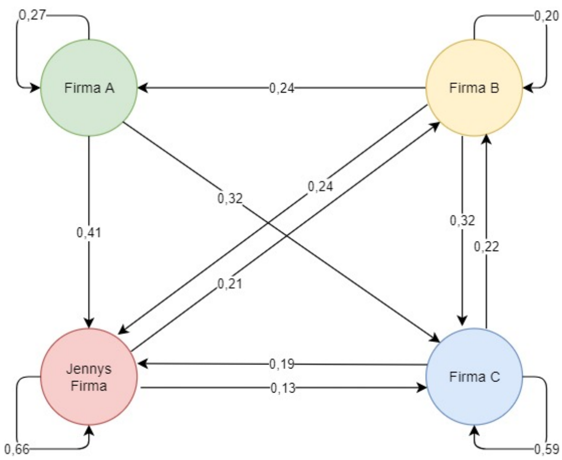

Abb. 1: Prozessdiagramm mit jährlichen Übergängen.

Leider lässt sich mit einem solchen Diagramm nur schwer rechnen. Alex erklärt Jenny jedoch, wie man aus einem solchen Diagramm eine sogenannte Übergangsmatrix abliest: „Wir schreiben eine quadratische Matrix auf, also eine Matrix mit gleich vielen Zeilen und Spalten. Dann schreiben wir an der jeweiligen Zeile und Spalte eine Firma auf.“

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cccc}\text{Jennys Firma} & \text{Firma A} & \text{Firma B} & \text{Firma C}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Jennys Firma}\\ \text{Firma A}\\ \text{Firma B}\\ \text{Firma C}\end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

„Und nun tragen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten ein. Dabei sehen wir beispielsweise, dass ein Übergang von $0,22$ von Firma C zu Firma B stattfindet. Also verliert Firma C 22% seiner Kunden an Firma B. Das wird in die Matrix eingetragen. Dabei gibt die Spalte an, **wohin** die Kunden gehen und die Zeile, **woher** sie kommen.“

$$\begin{array}{l} \\ \text{Jennys Firma} \\ \text{Firma A} \\ \text{Firma B} \\ \text{Firma C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Jennys Firma} & \text{Firma A} & \text{Firma B} & \text{Firma C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & 0,22 & \end{pmatrix} \end{array}$$

4.1 Aufgabe

Tragt die restlichen Komponenten der Matrix ein.

4.2 Aufgabe

Zu Beginn hat Jennys Firma 5.000 Kunden, Firma A 10.000 Kunden, Firma B 20.000 Kunden und Firma C 70.000 Kunden. Die Gesamtanzahl an Kunden bleibt gleich. Wie verändert sich diese Kundenverteilung nach einem Jahr? (Tipp: Schreibt die ursprüngliche Kundenverteilung als Vektor.)

4.3 Aufgabe

Nach wie vielen Jahren hat Jennys Firma den größten Kundenanteil? Stellt sich irgendwann ein Gleichgewicht ein?
Hinweis: Für den zweiten Teil der Aufgabe ist ein Computerprogramm hilfreich.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der zweiten Aufgabe!

Allgemeine Hinweise
Einsendeschluss: Sonntag, 04. Dezember 2022, 19:59 Uhr.

Gebt eure Lösungen über unser Portal ab: `https://unikik-portal.de/anmeldungen/users/login`
Das zulässige Dateiformat für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern) ist PDF.

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure hochgeladenen Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Dateien! Um sicherzugehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei und für die Korrektor*innen zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch mal von eurem Account herunterladen und öffnen. Dateien, die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter
`https://www.uni-hannover.de/bigbangchallenge`
Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.