B!G B4NG Challenge, 21. Wettbewerb
Aufgabe 1

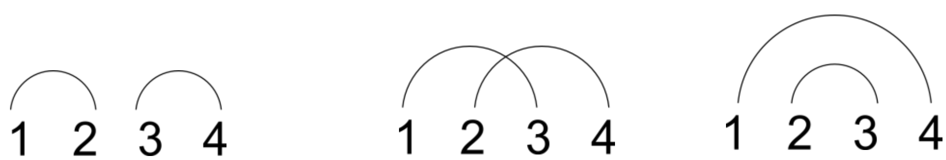
Gekreuzt und geschachtelt

Die erste Aufgabe im diesjährigen Wettbewerb wird vom Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik der Leibniz Universität Hannover gestellt.
In dieser Aufgabe geht es um Paarungen und das Abzählen der verschiedenen Möglichkeiten der Paarbildung. Der Bereich der Mathematik, der sich damit befasst, heißt Kombinatorik.

Weitere Informationen zum Studiengang der Mathematik findet ihr unter http://www.math.uni-hannover.de

Bildnachweis:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:B-Standardformation_1._TC_Ludwigsburg.jpg

In einer Turnhalle befindet sich eine gerade Anzahl von Schüler*innen und jede Person soll sich eine*n Sportpartner*in suchen. Aber wie das so ist, soll das Suchen und Finden nach speziellen Regeln ablaufen. Als Mathematiker*in betrachten wir alles allgemein und wollen deshalb mit $2n$ Schüler*innen rechnen, wobei n eine natürliche Zahl ist. D. h. wir untersuchen die Paarungen der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.
Für $n = 2$ kann man sich die verschiedenen Paarungen folgendermaßen aufzeichnen:



Wie man an dem Beispiel sieht, werden die Zahlen von 1 bis $2n$ in der natürlichen Reihenfolge hingeschrieben, und dann gepaarte Zahlen durch einen Bogen miteinander verbunden. Zwei „Statistiken" werden uns im Folgenden beschäftigen:

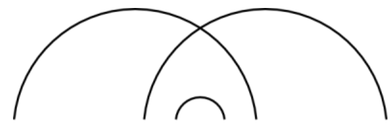
1. Die **Anzahl der kreuzenden Bogenpaare**, und
2. Die **Anzahl der schachtelnden Bogenpaare**.

Zwei Bögen, der eine von i nach j, der andere von k nach l

1. **kreuzen**, wenn gilt: $i < k < j < l$ oder $k < i < l < j$,
2. **schachteln**, wenn gilt: $i < k < l < j$ oder $k < i < j < l$.

Betrachten wir zwei Beispiele:

Fünf Schachtelungen



Zwei Schachtelungen und eine Kreuzung

Bevor wir loslegen können, benötigen wir noch zwei Begriffe: Die kleinere Zahl einer Paarung nennen wir **Öffner**, die größere **Schließer.** Die Menge der **Öffner einer Paarung** (auch Öffnermenge genannt) besteht also aus denjenigen Zahlen, die mit größeren Zahlen gepaart sind.

a) Grundlagenteil (10 Punkte):

Aufgabe 1 (Zum Aufwärmen)

Betrachtet Paarungen von $\{1,2,\ldots,2n\}$. Welche Zahl ist immer Öffner, welche Zahl niemals und wie viele Öffner muss es geben? Zeichnet zu den Öffnermengen $\{1,2,3\}$ sowie $\{1,2,5\}$ alle möglichen Paarungen.

Bevor wir uns mit Kreuzungen und Schachtelungen in Paarungen beschäftigen, ist es wohl noch angebracht, sich zu überlegen, wie viele Paarungen von $\{1,2,\ldots,2n\}$ es denn insgesamt gibt. Es sind sehr viele! An große Mengen von Objekten muss sich ein*e Kombinatoriker*in übrigens mit der Zeit gewöhnen.

Aufgabe 2

Wie viele verschiedene Paarungen von $\{1,2,\ldots,10\}$ gibt es? Könnt ihr auch eine allgemeine Formel für die Menge $\{1,2,\ldots,2n\}$ angeben?

Aufgabe 3

Wie viele Paarungen von $\{1,\ldots,6\}$ und $\{1,\ldots,8\}$ gibt es

1. ohne Kreuzungen und ohne Schachtelungen,
2. ohne Kreuzungen,
3. ohne Schachtelungen?

Zeichnet die verschiedenen Fälle auf und gebt in jedem Fall die Öffnermenge an!
Hinweis: Gebt zunächst die möglichen Öffnermengen an und sucht euch dann dazu die passenden Fälle heraus.

b) Mittlerer Teil (10 Punkte):
Im Folgenden wollen wir zwei verschiedene Mengen betrachten:
Sei $K(n,\ddot{O},k)$ die Menge der Paarungen von $\{1,2,...,2n\}$ mit Öffnermenge $\ddot{O}$ und k Kreuzungen und $S(n,\ddot{O},k)$ die Menge der Paarungen von $\{1,2,...,2n\}$ mit Öffnermenge $\ddot{O}$ und k Schachtelungen.
Wir wollen zeigen, dass $K(n,\ddot{O},k)$ und $S(n,\ddot{O},k)$ gleich viele Elemente haben. In der Kombinatorik macht man dies, indem man zeigt, dass zu jedem Element aus der einen Menge genau ein Element aus der anderen Menge gehört und umgekehrt.

Versuchen wir uns zunächst am besonders einfachen (und wichtigen Fall) $k=0$. Nicht-kreuzende und nicht-schachtelnde Paarungen kommen bei den verschiedensten Problemen in der Kombinatorik vor. Ein Grund dafür ist wohl, dass sie von den berühmten Catalan-Zahlen gezählt werden, siehe https://oeis.org/A000108 .

Aufgabe 4
Wie viele Elemente enthält $K(5,\{1,2,5,6,8\},0)$? Wie viele Elemente enthält $S(5,\{1,2,5,6,8\},0)$? Zeichnet sie alle auf!

Aufgabe 5
Beschreibt eine Methode, die aus einer Paarung in $K(n,\ddot{O},0)$ eine Paarung in $S(n,\ddot{O},0)$ macht, sodass jede Paarung in $S(n,\ddot{O},0)$ genau einmal erzeugt wird. Wie sieht die umgekehrte Methode aus, also ausgehend von $S(n,\ddot{O},0)$? Überzeugt euch nochmals davon, dass die beiden Mengen gleich groß sein müssen.

c) Für Profis (10 Punkte)
Mittlerweile sind uns die Objekte, mit denen wir hier spielen, ja schon recht vertraut. Wie bereits erwähnt, wollen wir zeigen, dass es gleich viele Paarungen mit k Schachtelungen wie Paarungen mit k Kreuzungen gibt. Wie findet man einen Beweis? Indem man Beispiele rechnet!

Aufgabe 6
Wie viele Elemente (Paarungen) sind in $K(3,\{1,2,3\},2)$ und $S(3,\{1,2,3\},2)$ sowie in $K(4,\{1,2,3,5\},2)$ und $S(4,\{1,2,3,5\},2)$ enthalten? Zeichnet sie alle auf!

Das Pflichtprogramm ist absolviert, was nun folgt, ist die Kür:

Aufgabe 7
Verfeinert eure Methode aus Aufgabe 4 und überlegt euch ein Verfahren, das jedes Element aus $K(4,\{1,2,3,5\},2)$ eindeutig nach $S(4,\{1,2,3,5\},2)$ überführt.

Euer Verfahren aus Aufgabe 7 könnte man nun noch erweitern, um allgemein zu zeigen, dass $K(n,\ddot{O},k)$ und $S(n,\ddot{O},k)$ gleich groß sind. Aber das führt hier zu weit.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der ersten Aufgabe!

Allgemeine Hinweise
Einsendeschluss: Sonntag, 31. Oktober 2021, 19:59 Uhr.

Gebt eure Lösungen über unser Portal ab: https://unikik-portal.de/anmeldungen/users/login
Das zulässige Dateiformat für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern) ist PDF.

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure hochgeladenen Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Dateien! Um sicherzugehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei und für die Korrektor*innen zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch mal von eurem Account herunterladen und öffnen. Dateien, die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter:
www.uni-hannover.de/bigbangchallenge
Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.