4 Science Challenge, 23. Wettbewerb

Aufgabe 1: Mathematik über den Alltag hinaus

25.09.2023

Diese Aufgabe kommt aus dem Bereich der Mathematik. Weitere Informationen zum Studiengang Mathematik findet ihr unter `https://www.maphy.uni-hannover.de/de/studium/im-studium/mathematik`.

„Wurde die Mathematik entdeckt oder erfunden?“ Dies ist eine Frage, welche die Menschheit und insbesondere die Philosophie bereits seit langem beschäftigt und wozu es viele verschiedene Positionen gibt. Unabhängig von der genauen Antwort hat sich jedoch herausgestellt, dass uns die Mathematik im Alltag in weitaus mehr Bereichen begleitet und begegnet, als man im ersten Moment erwartet. Dabei etablieren sich beim Lernen des Umgangs mit der Mathematik einige Strukturen, die wir dann als Automatismen anwenden und zumeist nicht mehr hinterfragen. Die Aufgabe der Mathematik als Wissenschaft ist es allerdings, diese Strukturen zu untersuchen, zu abstrahieren und eventuelle Alternativen zu erforschen. Diese Alternativen können dabei besondere Vorteile im Bezug auf verschiedene Probleme bieten, die in dem klassischen, bekannten System nicht oder nur schwer lösbar gewesen wären. Mit zwei dieser Strukturen wollen wir uns in dieser Aufgabe näher befassen. Das ist zum einen das System, in dem wir Zahlen darstellen, zum anderen der Bezug der Mathematik zu realen Problemen und wie eine „unrealistische“ Antwort auf eine mathematische Frage zu der Erweiterung der reellen Zahlen geführt hat, welche sich als gewaltiger Vorteil z. B. für die moderne Physik herausgestellt hat.

1 Basen und Modulo

1.1 Basen

Die meisten von uns lernen das Zählen von Gegenständen durch das Abzählen mit den Fingern. Daher hat sich in unserer Gesellschaft das Dezimalsystem als Standard etabliert. Dabei wird jede Stelle durch ein Vielfaches einer Potenz mit der Basis 10 dargestellt:

$$513,2 = 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} \tag{1}$$

Allgemeiner lässt sich jede rationale Zahl x mit endlich vielen Dezimalstellen angeben durch:

$$\begin{aligned} x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots a_0 \cdot 10^0 + \dots + a_{-n} \cdot 10^{-n} \\ \text{mit } a_n, \dots, a_{-n} \in [0, 1, \dots, 9] \\ \text{und } n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2}$$

Dieses System hat sich bei uns etabliert; es gibt allerdings noch weitere Systeme, die wir in unserem Alltag verwenden.

1.1.1 Aufgabe

Zwei weitere bekannte Systeme sind das Binärsystem mit der Basis 2 und das Hexadezimalsystem. Stellt die Zahlen 16, 37, 169 und 1313 in diesen Systemen dar. Wofür werden diese beiden Systeme verwendet?

1.1.2 Aufgabe

Prinzipiell lassen sich Basen für alle möglichen natürlichen Zahlen größer als 1 finden. Stellt eine weitere Basis mit eurer Lieblingszahl, welche sich von den bisherigen unterscheidet, auf und stellt die Zahlen aus 1.1.1 in dieser Basis dar.

1.2 Modulo-Rechnung

Eng verknüpft mit diesen verschiedenen Basissytemen ist die Modulo-Rechnung oder Division mit Rest. Das berühmteste Beispiel hierfür ist die Uhr. In unserem Alltag kann man sowohl 16:00 als auch 4 Uhr (nachmittags) verwenden, um dieselbe Uhrzeit auszudrücken. Dies liegt daran, dass unsere Uhr in 12 Sektionen eingeteilt wurde. Modulo (mod) bezeichnet dabei den Rest einer ganzzahligen Division. Wenn man daher 16 durch 12 teilt, erhält man 1 mit dem Rest 4. Dies schreibt man dann in der folgenden Form:

$$16 \bmod 12 \equiv 4 \tag{3}$$

Dies lässt sich ebenfalls auf weitere Systeme übertragen.

1.2.1 Aufgabe

Es sei heute Freitag, der 18.08.2023, um 11:00. Begründet mit der Modulo-Rechnung:

a) Welches Datum und welche Uhrzeit ist in 1000 Stunden?

b) Welcher Wochentag war am 18.08.2022?

c) Welcher Wochentag wird am 18.08.2024 sein?

d) Welches Datum hat man in 1000 Tagen?

Worauf muss ich hier bei der Implementierung des mathematischen Zusammenhangs in der Realität achten?

Bisher haben wir uns verschiedene Darstellungssysteme für die Zahlen angeschaut und wie wir diese im Alltag verwenden. Allerdings haben sich auch die Zahlenbereiche, mit denen wir unsere Umwelt beschreiben, weiterentwickelt. Ausgehend von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zum Zählen wurden diese kontinuierlich erweitert, um kompliziertere Sachverhalte wiedergeben zu können, bis hin zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, welche für die meisten alltäglichen Probleme ausreichen. Allerdings konnten bereits arabische Wissenschaftler im 8./9. Jahrhundert feststellen, dass die reellen Zahlen nicht ausreichen, um jedes mathematische Problem zu lösen. Die weitere Erforschung führte zu den sogenannten „imaginären Zahlen“, welche im Folgenden näher betrachtet werden sollen.

2 Komplexe Zahlen

2.1 Grundlagen

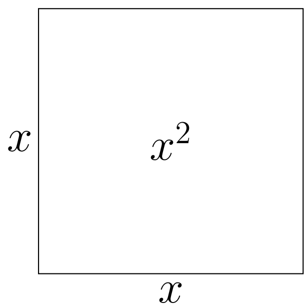
Sobald man in der Mathematik die Multiplikation mit negativen Zahlen einführt, spielt das Vorzeichen der beiden Faktoren für das Ergebnis eine essenzielle Rolle. Dabei wird zumeist auf das positive Vorzeichen (+) verzichtet, um die Multiplikation von der Addition unterscheiden zu können, und das negative Vorzeichen (-) wird dabei durch Klammern abgegrenzt. Vereinfachend kann man sich diese Vorzeichen als eine Multiplikation mit einer positiven oder negativen 1 vorstellen, da die 1 das neutrale Element der Multiplikation ist und keine Veränderung am Ergebnis erzeugt. Ebenfalls bekommt man in dem Zusammenhang beigebracht, dass die Multiplikation zweier negativer Faktoren ein positives Ergebnis erzeugt, geläufig als „Minus mal Minus ergibt Plus“ bezeichnet.

$$-(-a) = (-1)(-a) = (-1)(-1)a = (-1)^2 a = 1a = a \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$
$$(-a)(-a) = (-1)(-1)(a)(a) = (-1)^2 a^2 = 1a^2 = a^2$$

Aus diesem Zusammenhang folgt allerdings ebenfalls, dass das Quadrat einer Zahl niemals negativ sein kann. Das bedeutet, dass die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \tag{4}$$

in den reellen Zahlen keine Lösungen hat. Dies kann man geometrisch sehr gut visualisieren. Bei der Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats wird ebenfalls die Seitenlänge quadriert.



Allerdings müsste laut der Gleichung 4 der Flächeninhalt -1 sein. Ein negativer Flächeninhalt ergibt jedoch in der Realität keinen Sinn.
Das Schöne an der Mathematik ist allerdings nun, dass man sich dennoch die Frage stellen kann: „Wie kann das trotzdem funktionieren?“. Zu diesem Zweck wurde die imaginäre Einheit i eingeführt. Diese besitzt die Eigenschaft, dass $i^2 = -1$ und ermöglicht so das Quadrieren mit negativem Ergebnis bzw. das Ziehen von Quadratwurzeln aus negativen Zahlen. Diese Erweiterung der reellen Zahlen nennt man komplexe Zahlen $\mathbb{C}$. Die Gleichung 4 besitzt nun die Lösungen $x = \pm i$. Allgemeiner bedeutet dies für $a \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\begin{aligned} & x^2 = -a = -1 \cdot a \\ \Rightarrow \quad & x^2 = (+i)^2 \cdot a \text{ oder } x^2 = (-i)^2 \cdot a \end{aligned}$$

Also hat die Gleichung die beiden Lösungen $x = \pm i\sqrt{a}$.

2.1.1 Aufgabe

Was sind die Lösungen der folgenden Gleichungen in den komplexen Zahlen? (Tipp: Es können die gleichen Lösungsstrategien verwendet werden wie in den reellen Zahlen, nur jetzt besitzt die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ein Ergebnis.)

a) $4x^2 + 7 = 0$

b) $4x^2 + 16x + 7 = 0$

c) $3x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

Eine allgemeine komplexe Zahl z besteht aus zwei Teilen, einem Realteil Re(z) und einem Imaginärteil Im(z).

$$\begin{aligned} z &= a + i \cdot b && \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Re(z)} &= a && \\ \mathrm{Im(z)} &= b && \text{(Nicht } i \cdot b\text{!)} \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass sowohl der Imaginärteil als auch der Realteil aus einer reellen Zahl besteht, dem Imaginärteil allerdings die imaginäre Einheit vorangestellt ist. Für diese komplexen Zahlen sind ebenfalls die bereits bekannten Rechenoperationen definiert. Bei der Addition und Subtraktion werden die Real- und Imaginärteile addiert und subtrahiert. Seien $z_1 = a + i \cdot b$ und $z_2 = c + i \cdot d$ zwei komplexe Zahlen mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = \underbrace{(a + c)}_{\text{Real}} + i \cdot \underbrace{(b + d)}_{\text{Imaginär}} \\ z_1 - z_2 &= (a + i \cdot b) - (c + i \cdot d) = (a - c) + i \cdot (b - d) \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation hingegen werden die Klammern ausmultipliziert.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = ac + aid + ibc + i^2bd = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Und bei der Division wird meist die Bruchdarstellung verwendet.

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + i \cdot b)}{(c + i \cdot d)} = \ldots$$

Um hier eine komplexe Zahl in der üblichen Darstellung zu erhalten, muss das Ergebnis in den Real- und den Imaginärteil getrennt werden. Daher muss der Imaginärteil im Nenner durch eine passende Erweiterung eliminiert werden, sodass nur reelle Zahlen im Nenner übrig bleiben.

2.1.2 Aufgabe

Womit muss man den Bruch $\frac{z_1}{z_2}$ erweitern, damit der Nenner reell wird? Welche bekannte Formel wird hierfür verwendet?

2.1.3 Aufgabe

Es seien 3 komplexe Zahlen gegeben: $z_1 = -4 + i$, $z_2 = 3 - i \cdot 2$ und $z_3 = 3 + i \cdot 2$. Berechnet alle möglichen Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen.

2.2 Gaußsche Zahlenebene

Es ist oft hilfreich, eine geometrische Visualisierung zu finden. Die bisher bekannten Zahlenbereiche ließen sich auf einem Zahlenstrahl darstellen. Dabei sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die Basis mit einem Abstand von einer Einheit auf diesem Zahlenstrahl. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitern diese um die negativen Zahlen, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ verkleinern die Zwischenräume zwischen zwei Zahlen und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ füllen schlussendlich alle Lücken. Daher ist auf diesem Zahlenstrahl „kein Platz mehr“, da alle möglichen Punkte durch die reellen Zahlen abgedeckt werden. Da allerdings die komplexen Zahlen eine Erweiterung dieser reellen Zahlen sein sollen, müssen alle reellen Zahlen und mehr durch diese abgebildet werden können. Zur Visualisierung wird daher ein zweidimensionales Koordinatensystem verwendet. Dabei stellt die x-Achse den Realteil, also den bekannten reellen Zahlenstrahl, und die y-Achse den Imaginärteil dar. Dies ist die sogenannte Gaußsche Zahlenebene.

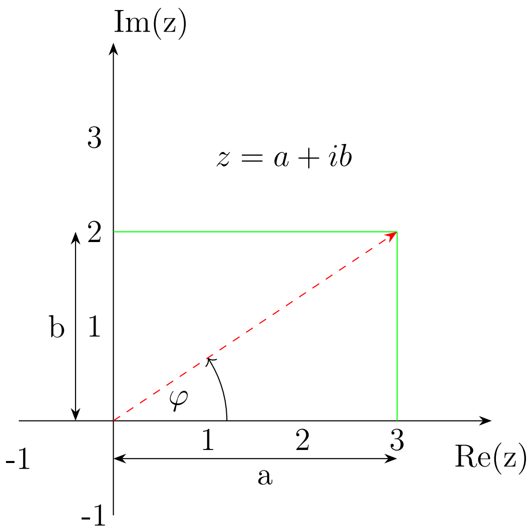


Abb. 1: Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene. Der Ortsvektor der komplexen Zahl in Rot und der Real- und Imaginärteil in Grün.

.

2.2.1 Aufgabe

Zeichnet die komplexen Zahlen z_1 bis z_3, sowie $z_1 + z_2$, $z_2 - z_3$ in eine Gaußsche Zahlenebene.

Der Begriff „imaginär“ wurde bei den komplexen Zahlen allerdings nicht zufällig gewählt, da der Imaginärteil eine Erfindung ist und keine reale Entsprechung hat. Dennoch ist der Abstand der komplexen Zahl vom Ursprung wichtig, um Längen festlegen zu können. In den reellen Zahlen ist dies der Betrag einer Zahl, welcher der positiven Version dieser Zahl entspringt. Da die komplexen Zahlen jedoch in einer zweidimensionalen Ebene angegeben werden, können wir diesen nicht sofort ablesen. Mithilfe des Satzes des Pythagoras lässt sich der Betrag allerdings berechnen. Der Abstand der komplexen Zahl zum Ursprung ist in Abbildung 1 die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Real- und

Imaginärteil als Katheten. Daraus lässt sich der Betrag direkt berechnen:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.2.2 Aufgabe

Berechne die Beträge für $z_4 = 2 + 2i$, $z_5 = 3i$, $z_6 = 4$, $z_7 = 4 - 3i$

Bisher wurden die komplexen Zahlen in sogenannten kartesischen Koordinaten wiedergegeben. Mithilfe des Abstands $|z|$ und des Winkels φ zur positiven reellen Achse lässt sich allerdings eine weitere Darstellungsform der komplexen Zahlen bestimmen.

2.2.3 Aufgabe

Finde eine Darstellung von a und b mithilfe der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus unter Zuhilfenahme des Winkels φ und $|z|$ und füge diese in die Gleichung ein:

$$z = a + ib = \ldots$$

Der Mathematiker Leonhard Euler konnte zeigen, dass sich die von euch gefundene Form ebenfalls in eine Darstellung durch die komplexe Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis überführen lässt.

$$z = a + ib = \cdots = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Die Darstellung mithilfe der trigonometrischen Funktionen bzw. Exponentialfunktionen wird als Polarkoordinaten bezeichnet. Die komplexe Zahl z ist dann ein Punkt auf einem Kreis mit dem Radius $|z|$, meist mit r bezeichnet, in der komplexen Ebene, bestimmt durch den Winkel φ. Der Winkel dreht sich dabei gegen den Uhrzeigersinn und wiederholt sich nach 360°. Bei einem Winkel von 0° handelt es sich um eine positive reelle Zahl, da $r \cdot e^{i0^\circ} \equiv r \cdot e^{i0} = r \cdot 1 = r$. Um einfacher rechnen zu können, wird hier oft die Darstellung von Winkeln in Vielfachen von π verwendet (Bogenmaß):

$$360^\circ \equiv 2\pi, \quad 180^\circ \equiv \pi, \quad 90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}, \quad 45^\circ \equiv \frac{\pi}{4}, \quad \ldots$$

2.2.4 Aufgabe

Stellt die folgenden komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten dar. (Tipp: Achtet bei der Bestimmung des Vorzeichens der Real- und Imaginärteile auf den Winkel!)

a) $z_8 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $z_9 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c) $z_{10} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

d) $z_{11} = e^{i\pi} + 1$

Die Darstellung über die Exponentialfunktion wird oft verwendet, da diese das Multiplizieren von komplexen Zahlen beschleunigen kann. Hier müssen nur noch die Potenzgesetze beachtet werden.

2.2.5 Aufgabe

Berechnet die Produkte $z_8 \cdot z_9$, $z_9 \cdot z_{10}$ und $z_8 \cdot z_{10}$ und gebt diese in kartesischen Koordinaten an.

Auch die Potenzierung von komplexen Zahlen ist in Polarkoordinaten schneller.

2.2.6 Aufgabe

Berechnet $(z_9)^2$ und $(z_{10})^4$ und gebt das Ergebnis in kartesischen Koordinaten an.

2.2.7 Aufgabe

Berechnet i^i und gebt das Ergebnis in kartesischen Koordinaten an.

2.3 Bonusaufgabe

In dieser Aufgabe wurden die Grundlagen der komplexen Zahlen behandelt. Dabei wurden sie als Lösung eines „unrealistischen“ Problems, hier ein negativer Flächeninhalt, eingeführt und ermöglichen es, die Gleichung $x^2 = -1$ zu lösen. Auch wenn dies auf den ersten Blick wie eine nette Spielerei ohne reale Anwendung wirkt, konnte Euler eine Verbindung zu den trigonometrischen Funktionen finden. In der modernen Physik werden beispielsweise harmonische Oszillatoren im Bereich der Mechanik, Optik und Quantenmechanik durch trigonometrische Funktionen beschrieben, deren Lösung allerdings aufgrund von komplizierten Termen in den Funktionen teilweise schwierig sein kann. Über die Eulergleichung lassen sich diese als Exponentialfunktion ausdrücken, was das Rechnen stark vereinfacht. Ebenfalls können physikalische Größen wie Amplitude und Phase sofort abgelesen werden. Allerdings muss hier dennoch beachtet werden, dass die komplexen Zahlen ein Hilfsmittel sind und man aufpassen muss, was „real“ und was „imaginär“ ist. Dieser Zusammenhang lässt sich ebenfalls anhand der folgenden Gleichung sehen.

$$1^x = 2$$

Diese Gleichung besitzt in den reellen Zahlen offensichtlich keine Lösung.

2.3.1 Aufgabe

Stimmt dies auch in den komplexen Zahlen?

Allgemeine Hinweise
Einsendeschluss: Sonntag, 05. November 2023, 19:59 Uhr

Gebt eure Lösungen über Stud.IP ab: `https://studip.uni-hannover.de`

Das zulässige Dateiformat für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern) ist PDF. Bitte ladet eure Dateien rechtzeitig hoch.

Gebt innerhalb der Datei euren Teamnamen, die Namen der Teammitglieder sowie deren Schulen an. Benennt eure Datei nach folgendem Schema: „Teamname_Aufgabe1“.

Das Hochladen funktioniert wie folgt:

Loggt euch mit den bei eurer Anmeldung zur 4 Science Challenge angelegten Zugangsdaten auf der Stud.IP-Seite ein (bitte nutzt dazu den „Login ohne WebSSO“). Geht dann auf „Meine Veranstaltungen“ und auf die 4 Science Challenge 2023/2024. Geht dann oben auf „Dateien“ und den Ordner „Upload Aufgabe 1“. Dort könnt ihr entweder über „Dokument hinzufügen“ oder über „Dateien hochladen“ eure Lösungsdatei hochladen.

Wenn ihr die Datei hochgeladen habt, öffnet sich ein Fenster, in dem u. a. nach Lizenzinformationen gefragt wird. Dieses braucht ihr nicht weiter zu beachten und könnt einfach auf „Speichern“ klicken. **Bitte achtet darauf, dass ihr eure Dateien wirklich innerhalb des Ordners „Upload Aufgabe 1“ hochladet und nicht außerhalb davon, da ansonsten die anderen Teams eure Dateien sehen können.**
Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter `www.uni-hannover.de/4sciencechallenge`

Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.